第36講　数列(3)

【基礎確認事項】

［1］　数列の和と一般項

□初項 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_1=a_1$ であり，

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

$$S_n\ \ =a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

である．よって $n\geqq 2$ のとき $S_n=S_{n-1}+a_n$ である．

したがって，

$a_1=S_1$
$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

⇒　C&U 1

［2］　群数列

□数列をある規則に従って群に分けたとき，その数列を**群数列**という．

例　第1群　第2群　第3群　第4群

1 | 3 , 5 | 7 , 9 , 11 | 13 , 15 , 17 , 19 | 21 , …

この例において，第4群の初項は13，末項は19，項数は4である．

□群数列においては，特に各群の項数が問題を解く手がかりとなる．この各群の項数に加え，群に分ける前の数列の規則性，もしくは群の分け方の規則性に注目し，第 n 群の初項，末項などを求めながら問題を解き進めていくとよい．

⇒　C&U 2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=-3n^2+6n$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2　奇数の数列 1，3，5，7，9，11，13，15，…… を，
1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，…… のように，第 n 群が n 個の項を含むように分ける．このとき，第 n 群の最初の項と最後の項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第36講　数列(3)

1　(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3$ であるとき，a_n の一般項を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の奇数を小さい順に並べた数列を，次のように第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように分ける．

$$1 \mid 3,\ 5,\ 7 \mid 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17 \mid 19,\ \cdots\cdots$$

このとき次の問いに答えよ．

(1)　第 n 群の最初の数を n を用いて表せ．

(2)　第 n 群の総和を n を用いて表せ．

(3)　777 は第何群の何番目にある数か．

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 次の数列について，次の問いに答えよ．

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, ……

(1) $\frac{7}{18}$ は第何項になるか．

(2) 第200項を求めよ．

(3) 初項から第200項までの総和を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　数列(3)

［1］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n^2-3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の初項は

$a_1=$ ア である．また一般項は　$a_n=$ イ $n-$ ウ である．

［2］　分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列を考える．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　この数列において，$\dfrac{7}{18}$ は第 エオカ 項である．

(2)　第 99 項は $\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　数列(3)

【CHECK & UP】

1 $S_n=-3n^2+6n$ より $S_1=-3+6=3$　よって　$a_1=S_1=3$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-3n^2+6n)-\{-3(n-1)^2+6(n-1)\}=-6n+9$　……①

①で $n=1$ のとき　$a_1=3$

よって $n=1$ のときも①は成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=-6n+9}$

2 $n\geqq 2$ のとき，第１群から第 $n-1$ 群までに入る項の項数は

$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$　である.

よって，第 n 群の最初の項は，もとの数列の $\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目の項である.

もとの数列の一般項は $a_n=2n-1$ より，第 n 群の最初の項は

$2\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=\boldsymbol{n^2-n+1}$

また，第 n 群の最後の項は，もとの数列の $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 番目より

その項は　$2\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}-1=\boldsymbol{n^2+n-1}$

群数列は，群をはずすと明確な規則性がわかるものと，はずすとわかりにくくなるものに分かれる．今回は元の数列が奇数の数列であるから前者である．

　特にもとの数列の一般項がわかる場合，問題となっている項がもとの数列の何番目かがわかれば，その一般項から具体的に求めることができる．そのカギを握るのが，「各群の項数」と「その和」である．その和が，群の末項までの項数，すなわちもとの数列の何番目かを表している．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　数列(3)

1　(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3$ であるとき，a_n の一般項を求めよ.

(1)　$n=1$ のとき

$S_1=1\cdot2=2$　　よって　$a_1=2$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$

この式は $n=1$ のときも成立する.

したがって　$\boldsymbol{a_n=2n}$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3=S_n$　とおくと，$n=1$ のとき　$S_1=2^1-3=-1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)=2\cdot2^{n-1}-1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$

この式は $n=1$ のときは成立しない

したがって　**$n\geqq2$ のとき　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$，$\boldsymbol{a_1=-1}$**

2　正の奇数を小さい順に並べた数列を，次のように第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように分ける.

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，……

このとき次の問いに答えよ.

(1)　第 n 群の最初の数を n を用いて表せ.

(2)　第 n 群の総和を n を用いて表せ.

(3)　777 は第何群の何番目にある数か.

(1)　もとの数列の第 n 項は　$2n-1$ である.

また，第 n 群の最後の数は，もとの数列の $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$ 番目の項である.

よって，第 n 群の最初の数は，もとの数列の第 $(n-1)^2+1$ 項である.

したがって求める数は　$2\{(n-1)^2+1\}-1=\boldsymbol{2n^2-4n+3}$

(2)　第 n 群の最後の数は　$2n^2-1$

よって，求める総和は初項 $2n^2-4n+3$　末項 $2n^2-1$　項数 $2n-1$　の等差数列の和である.

したがって　$\dfrac{2n-1}{2}\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}=\boldsymbol{(2n-1)(2n^2-2n+1)}$

(3)　$2n-1=777$ より　$n=389$　　よって　777 は，もとの数列の第 389 項

これが第 n 群に属するとすると

$(n-1)^2<389\leqq n^2$　　これを満たす自然数 n は $n=20$ のみ

第19群までに　$19^2=361$ 項ある.

したがって777は**第20群の28番目の項**である.

---

3 次の数列について，次の問いに答えよ.

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots\cdots$

(1) $\frac{7}{18}$ は第何項になるか.

(2) 第200項を求めよ.

(3) 初項から第200項までの総和を求めよ.

与えられた数列を，次のように第 n 群に n 個の数が含まれるように分ける.

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\cdots\cdots$$

第 n 群の初項は　$\frac{1}{n+1}$　末項は　$\frac{n}{n+1}$　であり，

第 n 群の末項はもとの数列の　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目の数である.

(1) $\frac{7}{18}$ は第17群の7番目の項である.

第16群までに　$\frac{1}{2}\cdot16\cdot17=136$ 項ある．よって，$\frac{7}{18}$ は**第143項**である.

(2) 第200項が第 n 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(n-1)n<200\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$(n-1)n<400\leqq n(n+1)$　　これを満たす自然数は　$n=20$ のみ

よって第200項は第20群に属する.

第19群までに　$\frac{1}{2}\cdot19\cdot20=190$ 項ある.

よって求める数は第20群の10番目の数，つまり　$\mathbf{\frac{10}{21}}$　である.

(3) 第 n 群に含まれる数の和は　$\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}n$

よって求める和は　$\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}k+\left(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\cdots\cdots+\frac{10}{21}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot19\cdot20+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)$$

$$=95+\frac{55}{21}=\mathbf{\frac{2050}{21}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第36講　数列(3)

［1］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n^2-3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の初項は $a_1=$ **ア** である．また一般項は　$a_n=$ **イ** $n-$ **ウ** である．

［2］　分母と分子の和が2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列を考える．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　この数列において，$\frac{7}{18}$ は第 **エオカ** 項である．

(2)　第99項は $\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である．

［1］　$a_1=S_1=4\cdot1^2-3\cdot1=\mathbf{1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2-3n)-\{4(n-1)^2-3(n-1)\}=8n-7$

この式で $n=1$ のとき　$a_1=1$　よって　$n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに $a_n=\mathbf{8}n-\mathbf{7}$

［2］　分母と分子の和が同じ分数を1つの群として考える．

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4}\cdots\cdots$$

第 n 群の項数は n 個であり，第 n 群までの項の総数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ である．

また，第 n 群に含まれる分数の分母と分子の和は $n+1$ であり，分子は各群の何番目の項かを表している．

(1)　$\frac{7}{18}$ は第24群の7番目の数である．第23群までに　$\frac{1}{2}\cdot23\cdot24=276$ 項ある．

よって　$\frac{7}{18}$ は　第 **283** 項である．

(2)　第99項が第 n 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(n-1)n<99\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\qquad つまり\quad (n-1)n<198\leqq n(n+1)$$

これを満たす自然数 n は　$n=14$ のみ．第13群までに　$\frac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$ 項ある．

したがって　第99項は第14群の8番目の項，すなわち　$\frac{8}{14-8+1}=\mathbf{\frac{8}{7}}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。